Fuchs群によって不変なPick-補間問題の解について (再生核の理論の応用)

高橋, 世知子

数理解析研究所講究録 1352 巻 2004 年 54-63

Fuchs 群によって不変な Pick-補間問題の解について

奈良女子大学 理学部 高橋 世知子 (Sechiko Takahashi)
Department of Mathematics
Nara Women's University

はじめに 複素平面上の領域 D 内に k 個の相異なる点 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ と各点 z_i $(i = 1, \cdots, k)$ に対して、n_i 個の複素数 c_{is} $(s = 0, \cdots, n_i - 1)$ を与え、点 z_i での Taylor 展開の最初の n_i 個の係数が c_{is} となるような D で正則かつ $|f| \leq 1$ となる函数 f に関する問題について、これを拡張された補間問題ー extended interpolation problem ーと呼んでいるが、領域が単位円である場合は、解の存在定理をはじめ、解全体のパラメーター表示等殆どの事柄が解明されている。一方多重連結領域の場合は解の存在定理は明確に示されているが ([1], [18])、解全体の様子や適当なパラメータ表現などは殆ど明らかになっていない。いくつかの部分的なアプローチが試みられている。一つの見方として、M.Heins は 1940 年多重連結領域に於ける補間問題をその普遍被覆面上の補間問題として捉え考察し、次のことを示した [7]。

$D = \{z : |z| < 1\}$ とし、T を D の解析的自己同型とする。D 内に k 個の相異なる点 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ をとり、各点 z_i に対して、複素数 w_i $(i = 1, \cdots, k)$ を与える。T-不変なデータ $\{T^m(z_i)\}, \{w_i\}$ $(1 \leq i \leq k,\ m \in \mathbb{Z})$ に対する Pick 補間問題の解、即ち

$$f\big(T^m(z_i)\big) = w_i \qquad (1 \leq i \leq k,\ m \in \mathbb{Z})$$

を満たす D で正則かつ $|f| \leq 1$ となる函数 f が存在すれば、$\tilde{f} \circ T = \tilde{f}$ を満たす T-不変な解 $\tilde{f}$ も必ず存在する。

これは2重連結領域に於いては、その普遍被覆面である単位円上での補間問題が解けると十分であることを示している。Heins の手法をより一般化して用いることにより、拡張した場合にも同じ結果が示される [19]。

$n(\geq 3)$ 重連結領域の場合はどの様になっているのか？これは被覆変換群 (Fuchs 群) Γ によって不変な解が存在するかどうかの問題である。Donald Marshall は Γ 不変なデータを与えたとき、解は存在するが、Γ 不変な解は存在しない例を与えた (unpublished)。

1986 年に M.Heins は論文 [10] でこの例を紹介し、それを更に拡げ補間問題の解について詳しく考察し、色々な場合が起こりうることを示している。その論文"On an exemple of Donald Marshall concerning Automorphic Pick-Nevanlinna interpolation problem" に従って、Marshall の例をはじめ Heins の結果について解説する。

§1. Nevanlinna parametrizations

Γ 不変な解の存在性については、単位円の内部での Pick-補間問題の解はどのような性質をもっているのか、詳しく調べなければならない。R.Nevanlinna は 1919 年、Schur のアルゴリズムを用い Pick interpolation の解の存在性を示し、1929 年には解全体を explicit に表す式を与え解の様子をが明らかにした ([12],[13])。以後の補間問題の研究において大変重要な役割を果たしているその Nevanlinna の理論を、見通しよく整理し、諸性質を分かり易い形で記述することができている ([17],[20])。それに従って Nevanlinna のパラメター表示について説明する。又先の理解を助ける為、いくつかの命題を用意する。

$D = \{z : |z| < 1\}$ とし、$\mathcal{B} = \{f : D$ で正則かつ $|f| \leq 1\}$ とおく。Γ を D 上に作用する Fucks 群とする。ここで、Γ は elliptic なものは含まず、2つ以上の要素からなるものとする。$O_1, \cdots, O_n$ を n 個の相異なる orbits (D/Γ の要素) とし、$w_1, \cdots, w_n$ を n 個の複素数とする。

$$f(z) = w_k \qquad z \in O_k \quad (k = 1, \cdots, n)$$

となる $f \in \mathcal{B}$ についての Pick-Nevanlinna interpolation を考える。

問題の解全体の集合を $\mathcal{E}$ とおく。$\mathcal{E}$ は $\mathcal{B}$ によってパラメータ表示されることが知られている。パラメータ表示及びそれから得られる諸性質について述べる ([7],[13],[17],[19])。

全単射な写像 $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E}$ が D で正則な函数の組 (P, Q, R, S) を用いて

$$\pi(g) = \frac{Pg + Q}{Rg + S}, \qquad Rg + S \not\equiv 0 \qquad (\forall g \in \mathcal{B})$$

と表されるとき、π を $\mathcal{E}$ の Nevanlinna parametrization と定義し、(P, Q, R, S) を π の表現とよぶ。$\mathcal{E}$ が2つ以上の解を持つならば $\mathcal{E}$ の Nevanlinna parametrization が存在し、P, Q, R, S は次の性質を持つ。

(a) $S \not\equiv 0$;

(b) $|P/S| < 1, |Q/S| < 1, |R/S| < 1$;

(c) $Q/S \in \mathcal{E}$;

(d)
$$\frac{PS-QR}{S^2} = U \cdot B\,,$$

ここで、$0 < |U| \leq 1$、B は $\bigcup_{k=1}^{n} O_k$ を零点とする Blaschke product。

上の性質より、各 Nevanlinna parametrization π は $(P,Q,R,1)$ となる形の一つかつ唯一つの表現を持つことが分かる。便宜上簡単の為、π と $(P,Q,R,1)$ を同一視して用い、紛らわしくない限り $\pi = (P,Q,R,1) \in \mathcal{P}$ 等と表す。

$\mathcal{P}$ を $\mathcal{E}$ の Nevanlinna parametrization の全体とし、G を Möbius 変換 (D の解析的自己同型) 全体の作る群とする。

$$(\alpha^*(\pi))(g) = \pi(\alpha \circ g) \qquad (\alpha \in G, \pi \in \mathcal{P},\, g \in \mathcal{B})$$

と定義する。$\alpha_1\,, \alpha_2 \in G$ に対して、

$$(\alpha_1 \circ \alpha_2)^* = \alpha_2^* \circ \alpha_1^*\,, \qquad id^* = id$$

であり、G は $\mathcal{P}$ に自然に作用している。次のような形で Nevanlinna parametrization の全体を把握することができ、$\mathcal{P}$ と G が bijective に対応していることが分かる。

命題 1　任意の $\pi, \pi_0 \in \mathcal{P}$ に対して $\pi = \alpha^*(\pi_0)$ となる $\alpha \in G$ が唯一つ存在する。

上の命題より、parametrization の一意性に関する次の命題が成り立つことが分かる。

命題 2　$z_0 \in D \setminus \bigcup_{k=1}^{n} O_k$ をとる。このとき、

$$\pi = (P,Q,R,1) \quad \text{s.t.} \quad P(z_0) > 0,\ R(z_0) = 0$$

となる、$\pi \in \mathcal{P}$ は一つかつ唯一つ存在する。

点 $z \in D$ での解の値の集合 $W(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{E}\}$ を考える。これは D 内の閉円であり、$(P,Q,R,1) \in \mathcal{P}$ を用いると

$$W(z) = \left\{ \frac{P(z)\zeta + Q(z)}{R(z)\zeta + 1} : \zeta \in \overline{D} \right\}$$

と表わされる。

ここで最初に与えられた問題に戻ると、与えられたデータ $\{O_i\}, \{w_i\}$ $(1 \leq i \leq n)$ は Γ 不変であるから、

$$W\big(\sigma(z)\big) = W(z) \qquad (z \in D,\ \sigma \in \Gamma)$$

が成り立ち、次を命題を導くことができる [19]。

命題 3　$\pi = (P, Q, R, 1) \in \mathcal{P} \Longrightarrow \pi_\sigma = (P \circ \sigma,\ Q \circ \sigma,\ R \circ \sigma,\ 1) \in \mathcal{P} \quad (\forall \sigma \in \Gamma)$

Γ 不変な解はいつ存在するのか調べてみる。$\pi = (P, Q, R, 1) \in \mathcal{P}$ を一つとり固定する。上の命題 1 と命題 3 より、任意の $\sigma \in \Gamma$ に対して、$\pi = \alpha_\sigma^*(\pi_\sigma)$ となる $\alpha_\sigma \in G$ が対応している。。

$$\alpha_{\sigma \circ \tau} = \alpha_\sigma \circ \alpha_\tau \qquad (\sigma,\ \tau \in \Gamma)$$

となり、$h(\sigma) = \alpha_\sigma$ は homomorphism $h : \Gamma \longrightarrow G$ を与える。ここで、Γ 不変な解、即ち、$f \circ \sigma = f$ $(\sigma \in \Gamma)$ を満たす f をとる。$f = \pi(g)$ $(g \in \mathcal{B})$ と表されているとすると、

$$f = \pi(g) = \alpha_\sigma^*(\pi_\sigma)(g) = \pi_\sigma(\alpha_\sigma \circ g), \quad f \circ \sigma = \pi_\sigma(g \circ \sigma)$$

となっている。従って、

$f \in \mathcal{E}$, $f = \pi(g)$ が $f \circ \sigma = f$ $(\forall \sigma \in \Gamma)$ である為の必要十分条件は

$$(*) \qquad g \circ \sigma = \alpha_\sigma \circ g \qquad (\forall \sigma \in \Gamma)$$

が成り立つことである。

Γ が巡回群である場合は、Γ の生成元 σ に対する σ_α の不動点が $(*)$ をみたす g の存在を保証している。一般に沢山の生成元を持つ場合はどうであろうか？

当然のことだと思われるが、次のことを注意しておく。

上の議論に於ける homomorphism h は $\pi \in \mathcal{P}$ をとりそれに応じて決まったものである。別の $\pi' \in \mathcal{P}$ を選んだ場合はどうであろうか？このとき、$h'(\sigma) = \alpha'_\sigma$ によって homomorphism $h' : \Gamma \longrightarrow G$ が定義されたとする。今、命題 1 により、$\pi' = \tau^*(\pi)$ $(\tau \in G)$ と表されているとすると、これらの間に

$$\alpha'_\sigma = \tau^{-1} \circ \alpha_\sigma \circ \tau \qquad (\forall \sigma \in \Gamma)$$

が成り立つことはすぐに確かめられる。従って、$h(\Gamma)$ と $h'(\Gamma)$ は同型であり、上の議論は parametrization π の選び方に依存しない。又以下の議論においてもそうである。

§2. Marshall の例

S を双曲型な Riemann 面で class O_{AB} に属するものとする。、即ち、S で正則かつ有界な函数は定数しか存在しない。$D = \{z : |z| < 1\}$ とし、S の普遍被覆面を (D, ϕ) とする。

但し、$\phi : D \longrightarrow S$ は被覆写像である。(D,ϕ) の被覆変換 (Deck transformation) 群を Γ とする。相異なる $n+1$ 個の点 $p_0, \cdots, p_n \in S\ (n \geq 1)$ をとり、$O_k = \phi^{-1}(\{p_k\})\ (0 \leq k \leq n)$ とおく。このとき $E = \bigcup_{k=0}^{n} O_k$ は Carleson の条件をみたし、補間点列になっている。即ち、E 上の有界な複素数値函数は D で有界なある正則函数の E 上への制限になっている。X を E 上の有界な函数全体を表すものとし、X に次の 2 つの norm を入れる。

$\|x\|_1 = \min\{\sup_D |f| : f \in H^\infty(D),\ f|E = x\}$,

$\|x\|_2 = \sup_E |x|$.

この norm の入った X をそれぞれ X_1、X_2 と表すと、これらは $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間であり、$\|x\|_2 \leq \|x\|_1\ (\forall x \in X)$ が成り立つ。Banach の open mapping theorem より、恒等写像 $i : X_1 \longrightarrow X_2$ は同相写像であることが分かる。これより

$K = \{(w_1, \cdots, w_n) : \exists f \in \mathcal{B}\ \text{s.t}\ f(O_0) = \{0\}, f(O_k) = \{w_k\}\ k = 1, \cdots, n\}$

とおくと、K は compact な convex set であり、$O = (0, \cdots, 0)$ を内点として持つ。K_a を K の部分集合で f として Γ 不変なものを選ぶことのできる様な点の全体とする。S が class O_{AB} であったことより、K_a は $\mathbb{C}^n$ の原点 O のみからなる集合である。これは D 上に Γ によって不変なデータを与えたとき、解は存在するが、Γ 不変 (Γ-automorphic) な解はもはや存在しない例があることを示している。

上の Marshall の例をふまえ、次の性質を満たす S の正則近似列 $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ をとる。

(1) $\{p_0, \cdots, p_n\} \subset \Omega_j$;

(2) 各 Ω_j は相対 compact な領域であり、その境界 $\partial\Omega_j$ は有限個の互いに素な解析的 Jordan 曲線から成り、$\partial(S - \overline{\Omega}_j) = \partial\Omega_j$;

(3) $S - \overline{\Omega}_j$ の連結成分はいずれも相対 compact でない;

(4) $\overline{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1}\ (j = 1, 2, \cdots)$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = S$.

$\phi^{-1}(\Omega_j)$ の一つの連結成分 $D(\Omega_j)$ をとる。K_j を $\mathbb{C}^n$ の点 $(w_1, \cdots, w_n)$ であり、

$$|f| \leq 1,\ f(O_0 \cup D(\Omega_j)) = \{0\}, f(O_k \cup D(\Omega_j)) = \{w_k\}\ (k = 1, \cdots, n)$$

を満たす $f \in H^\infty[D(\Omega_j)]$ が存在するようなもの全体とする。$K_{j,a}$ を K_j の部分集合であり、$f = F \circ \phi|D(\Omega_j)$ $F \in H^\infty(\Omega_j)$ となる f をとることの出来るもの全体とする。

$$K_j \supset K_{j,a} = \{(F(p_1), \cdots, F(p_n)) : F \in H^\infty(\Omega_j),\ |F| \leq 1,\ F(p_0) = 0\}$$

と表される。ここで K_j と $K_{j,a}$ は連結成分 $D(\Omega_j)$ の選び方にはよらないことに注意する。K_j 及び $K_{j,a}$ は共に $\mathbb{C}^n$ の compact な convex set である。又、K_j は K を含み、$K_{j.a}$

は $H^\infty(\Omega_j)$ の函数 F に対応しているものであるから、どちらも $\mathbb{C}^n$ の原点を内点として持っている。

$$K_j \supset K_{j+1}\,,\quad K_{j,a} \supset K_{j+1,a}\,,\quad \bigcap_j K_{j,a} = K_a = \{O\} \qquad (\forall j \in \mathbb{N})$$

であるから、十分大きな j に対して、$K_{j,a} \subset K^i \subset K_j^i$ が成り立つ。(記号 M^i は M の内部を表すものとする。)

上の様な j を一つとり固定し、それを l で表す。$\phi^{-1}(\Omega_l)$ の連結成分 $D(\Omega_l)$ は単連結であるから、一対一等角写像 $\psi : D \longrightarrow D(\Omega_l)$ が存在する。$(D,\ \phi\circ\psi)$ は Ω_l の普遍被覆面、$\phi\circ\psi$ は被覆写像である。$(D,\ \phi\circ\psi)$ の被覆変換群を Γ^* とおく。Ω_l と Γ^* に対する K_l と $K_{l,a}$ は先の例の S と Γ に対する K と K_a に相当している。Ω_l は有限な位相的不変量を持ち、その境界は pointlike ではない Riemann 面である。

§3. Heins の定理

Fucks 群 Γ によって不変な解の存在性について、§2 での例を基に、与えるデータとの関係等より詳しく考察する。

1. S を境界が pointlike でない noncompact な Riemann 面でその基本群が有限生成であるものとする。$D = \{z : |z| < 1\}$ とおき、S の普遍被覆面を (D, ϕ) とする。ここで、$\phi : D \longrightarrow S$ は被覆写像である。(D,ϕ) の被覆変換群を Γ とすると、Γ は S の基本群と同型である。Möbius 変換 (D の解析的自己同型) 群を G とする。今ここでは、補間問題とは離れ、homomorphism $h : \Gamma \longrightarrow G;\ h(\sigma) = \alpha_\sigma$ が与えられたとき、§1 に記した条件

$$(*) \qquad\qquad g\circ\sigma = \alpha_\sigma \circ g \qquad (\forall\sigma \in \Gamma)$$

を満たす $g \in \mathcal{B}$ が存在するかどうかについて考察する。次の補題が成り立つ。

補題 $h(\Gamma)$ が Abel 群であるときには $(*)$ をみたす $g \in \mathcal{B}$ は 2 つ以上存在する。

証明 恒等変換でない 2 つの Möbius 変換 $\beta,\ \gamma \in G$ に対して、β と γ が可換であることと、β と γ の不動点の集合が同じであることとは同値であるから、$h(\Gamma)$ が Abel 群であるとは、同じ型の Möbius 変換から成り、不動点が一致していることである。$h(\Gamma)$ の恒等変換以外の要素が 1) 双曲的 (hyperbolic)、2) 放物的 (parabolic)、3) 楕円的 (elliptic) の 3 つの場合に分けて検討する。

1) 双曲的な場合。2 つの不動点を $\eta_1,\ \eta_2 \in \partial D$ とする。$g_i \equiv \eta_i$ となる $g_i \in \mathcal{B}$ $(i = 1, 2)$ が $(*)$ を満たすことは明らかである。

2) 放物的な場合。不動点は1つであり、それを $\eta \in \partial D$ とする。一次変換

$$w(z)=\frac{\eta+z}{\eta-z}\,; \qquad \{z:|z|<1\}\longleftrightarrow\{w:\mathrm{Re}\ w>0\}$$

を考える。η は w-平面の ∞ に対応し、$h(\Gamma)$ は右半平面 $\mathrm{Re}\ w>0$ の自己解析的同型であって、不動点が ∞ のものに対応している。(*) を満たす $g\in\mathcal{B}$ の存在性は、$w\circ g$ を考えることにより、nontrivial な homomorphism $\omega:\ \Gamma\longrightarrow\mathbb{R}$ が与えられたとき、

$$f\circ\sigma\ =\ f+\ i\omega(\sigma)\,, \qquad \sigma\in\Gamma \tag{3.1}$$

をみたす D で正則かつ $\mathrm{Re}\ f\geq 0$ となる函数 f が存在するかどうかの問題に帰着する。次の事実を使用する ([9] 参照)。

《 $\phi(0)=a$ とおく。a を始点とする S 上の l 個の閉曲線 $\gamma_1,\cdots,\gamma_l$ が S の基本群の生成元を与えているとする。このとき、$\mathbb{R}^l$ の原点の近傍 V が存在し、$\forall x\in V$ に対して、$u(a)=1$ かつ $\big(\omega(u,\gamma_1),\cdots,\omega(u,\gamma_l)\big)=x$ となる S での正値調和函数 u が存在する。ここで、$\omega(u,\gamma_k)$ は u の共役調和函数の閉曲線 γ_k に沿っての周期を表すものとする。》

γ_k に対応する Γ の要素を σ_k とする。始点を $0\in D$ とする γ_k の ϕ による lifting の終点は $\sigma_k(0)$ である。十分小さい $t>0$ をとると、$\omega(u,\gamma_k)=t\omega(\sigma_k)$ となる S 上の正値調和函数 u が存在する。$\mathrm{Re}\ f=t^{-1}u\circ\phi$ となる D 上の正則函数 f をとるとそれは (3.1) を満たしている。そしてこのような函数 f は無限個在る。

同様の議論を用いると次のことが成り立つことも分かる。

《 任意の $(\omega_1,\cdots,\omega_l)\in\mathbb{R}^l$ に対して、$\omega(\sigma_k)=\omega_k$ となる homomorphism $\omega\ :\Gamma\longrightarrow\mathbb{R}$ が唯一つ存在する。》

3) 楕円的な場合。この場合は上の 2) の場合に帰着させることが出来る。$h(\Gamma)$ に共通な不動点を 0 とする。この仮定は一般性を失わない。

$$\alpha_\sigma(z)=\eta(\sigma)z,\ |\eta(\sigma)|=1 \quad (\sigma\in\Gamma)$$

とする。$\eta(\sigma)\cdot\eta(\tau)=\eta(\sigma\circ\tau)$ $(\sigma,\tau\in\Gamma)$ が成り立つ。Γ の生成元 $\sigma_k,\ k=1,\cdots,l$ に対して、$\eta(\sigma_k)=e^{-i\theta_k}$ とおき、$\omega(\sigma_k)=\theta_k$ で homomorphism $\omega:\ \Gamma\longrightarrow\mathbb{R}$ を定義する。$e^{-i\omega(\sigma)}=\eta(\sigma)$, $(\sigma\in\Gamma)$ であり、今この ω に対して、上と同様に (3.1) を満たす D で正則かつ $\mathrm{Re}\ f>0$ となる函数 f をとる。$g=e^{-f}$ とおくと、この函数 g は $\mathcal{B}$ に属し、(*) を満たしていることがわかる。この様な g は無限個存在する。(証終)

付記。上の補題の証明の 1) の場合について、$h(\Gamma)$ が 2 つの共通の不動点を持ち、これに対する (*) の解が不動点の値をとる定数値函数 2 つのみであるような homomorphism h が存在することが知られている。(詳細は [10])

一方、homomorphism h が§1 で述べた、Γ 不変なデータを与えた Pick interpolation の解全体の Nevanlinna parametrization π から得られたものである場合は、$(*)$ を満たす g_1, g_2 $\in \mathcal{B}$ に対する解 $f_1 = \pi(g_1)$, $f_2 = \pi(g_2)$ をとると、$(1-t)f_1 + tf_2, (0 \leq t \leq 1)$ も又解であるので、結局無限個の $(*)$ を満たす $g \in \mathcal{B}$ が存在することになる。

2. ここで、我々の問題である単位円 $D = \{z : |z| < 1\}$ 上での Fuchs 群によって不変なデータによる Pick の補間問題について考える為、§2 の後半の状況の下に話を戻す。先ず、定理の証明での必要上、多重連結領域に於ける Pick-補間問題に関する次の命題を述べる。

命題 4　Ω を互いに交わらない $m+1$ 個の解析的 Jordan 曲線で囲まれた領域とする。$z_1, \cdots, z_n$ を Ω 内の相異なる n 個の点とする。

$$\Lambda = \{(f(z_1), \cdots, f(z_n)) : f \in H^\infty(\Omega), |f| \leq 1\}$$

は $\mathbb{C}^n$ の compact な convex set であり、Λ の境界点に対応する f は唯一つである。又この逆も成り立つ。([5], p130 参照)

§2 の記号を用いて、$K_{j,a} \subset K_j^i$ となる j を一つとり固定する。いまそれを l とする。$K_{l,a} \subset K_l^i$ であり、$K_{l,a}$ と K_l は共に $\mathbb{C}^n$ の原点 O を内点として持つ compact な convex set であった。Ω_l の普遍被覆面である単位円の内部 D と被覆変換群 Γ^* に関する Pick の補間問題の解について考える。K_l の点に対する D 上の補間問題と、その解の Nevanlinna parametrization によって導かれる homomorphism $h : \sigma \mapsto \alpha_\sigma$ による $h(\Gamma^*)$ との関係について、次の定理が成り立つ。点 $x \in K_l$ に対応している homomorphism を h_x と表すことにする。

Heins の定理　(1) $x \in K_l$ に対する Pick-補間問題の解は無限個存在する。

(2) $x \in K_l - K_{l,a}^i$ に対して、対応する $h_x(\Gamma^*)$ は可換ではない。

(3) $x \in \partial K_{l,a}$ に対しては、$(*)$ を満たす解は唯一つである。

(4) 原点 O と $y \in \partial K_{l,a}$ を結ぶ開線分 (O, y) 上の点 x、ここで x は y 十分近いとする、に対しては、対応する $h_x(\Gamma^*)$ は非可換であるが、$(*)$ をみたすものは無限個存在する。

証明 (1) 点 $x \in K_l$ に対する解が唯一つならば、それは明らかに Γ^* 不変であるから $K_{l,a}$ に属していなければならない。従って、$x \in \partial K_l$ に対する解は無限個存在する。y が原点 O と点 x を結ぶ線分 $(O, x]$ 上にあるときも、$y = tx$, $0 < t \leq 1$ であるから、解は無限個存在する。、$y = O$ のときは自明である。

(2),(3) $x \in K_l$ とする。対応する $h(\Gamma^*)$ が Abel 群ならば、先の補題より、Γ^* 不変な解は無限個存在する。従って $x \in K_{l,a}$ である。$K_{l,a}$ は $H^\infty(\Omega_l)$ に関するものであり、原点を内点としているから、命題 4 を適用すると、$x \in \partial K_{l,a}$ に対する解は唯一つであることが分かる。

(4) 簡単の為、$0 \in D \setminus \bigcup_{k=1}^n O_k$ とする。これは一般性を失わない。$ty, (0 < t < 1)$ に対する補間問題の解の parametrization として、命題 2 で述べた様に

$$(P_t, Q_t, R_t, 1) \quad \text{s.t. } P_t(0) > 0,\ R_t(0) = 0$$

となるものを選ぶ。$t \to 1$ のとき、函数列 $\{P_t\}, \{Q_t\}, \{R_t\}$ はそれぞれ $\mathcal{B}$ の函数 $P, Q, R,$ に収束する。$P(0) > 0,\ R(0) = 0$ であり、$(P, Q, R, 1)$ が y に対する補間問題の解の parametrization を与えていることが分かる。y に対応する $h_y(\Gamma^*)$ の要素 α_σ と α_τ $(\sigma, \tau \in \Gamma^*)$ の非可換性は、1 に十分近い t をとると、ty に対応する homomorphism h_{ty} による $h_{ty}(\Gamma^*)$ の非可換性を導く。解が無限個あることは上の場合と同様に証明できる。

References

[1] M. B. Abrahamse, *The Pick interpolation theorem for finitely connected domains*, Michigan Math. J. 26 (1979), 195–203

[2] L. Ahlfors, *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, New York, 1973

[3] L. Carleson *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer.J. Math. 80 (1958), 921–232

[4] A. Denjoy *Sur une classe de fonctions analytique*, C.R.Acad.Sci.Paris 188 (1929), 140–142, 1084–1086

[5] S. D. Fisher, *Function Theory on Planer Domains*, Wiley, New York, 1983

[6] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981

[7] M. Heins, *Extremal problems for functions analytic and single-valued in a doubly-connected region*, Amer. J. Math. 62 (1940), 91–106

[8] M. Heins, *Nonpersistence of the grenzkreis phenomenon for Pick-Nevanlin- na interpolation on annuli*, Ann. Acad. Sci. A. I. 596 (1975)

[9] M. Heins, *Carathéodory bodies*, Ann. Acad. Sci. AI. Math.2 (1976) 203–232

[10] M. Heins, *On an example of Donald Marshall concerning automorphic Pick-Nevanlinna interpolation problems*, Complex Variables, 7 (1986), 71–78

[11] D. E. Marshall, *An elementary proof of Pick-Nevanlinna interpolation theorem*, Michigan Math. J. 21 (1974), 219–223

[12] R. Nevanlinna, *Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vor geschriebene Werte annehmen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. 13, No 1 (1919)

[13] R. Nevanlinna, *Über beschränkte analytische Funktionen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A 32, No 7 (1929)

[14] G. Pick, *Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden*, Math. Ann. 77 (1916), 7–23

[15] I. Schur, *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind*, J. Reine Angew. Math. 147 (1917), 205–232

[16] S. Takahashi, *Extension of the theorems of Carathéodory-Toeplitz-Schur and Pick*, Pacific J. Math. 138 (1989), 391–399

[17] S. Takahashi, *Nevanlinna parametrizations for the extended interpolation problem*, Pacific J. Math. 146 (1990), 115–129

[18] S. Takahashi, *Extended interpolation problem in finitely connected domains*, Oper. Theory Adv. Appl. 59 (1992), 305–327

[19] S. Takahashi, *A sufficient condition for Nevanlinna parametrization and an extension of Heins theorem*, Nagoya Math. J. 153 (1999), 87–100

[20] S. Takahashi *A survey of the extended interpolation*, Reproducing Kernels and their Applications, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht 1999, 189–212